Banque <<Agro>>
A et AE - 0203

MATHÉMATIQUES A
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont indépendants.

Dans le premier problème le graphe demandé à la question IV.1.4 sera tracé avec soin sur une feuille de papier millimétré. Les différentes parties de ce premier problème traitent de façons indépendantes du même objet **T**, défini dans le préambule.

Premier problème.

Dans ce problème **E** désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle polynôme toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans lui même ; on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et, pour tout entier naturel d, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On rappelle que, par convention, le degré du polynôme nul est fixé à $-\infty$.

Pour tout élément f de **E** on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

Première partie : exemples.
Soit ω un réel ; on note f_w l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_\omega(x) = e^{\omega x}$ et on note g l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x \ si\ x \in [0,1] \\ 2-x \ si\ x \in [1,2] \\ 0 \ \ sinon \end{cases}$$

I.1. Déterminer pour tout ω réel les fonctions $T(f_\omega)$ et $T(g)$.

I.2. Soit $\mathbf{C} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan, $\mathcal{G}$ la courbe représentative de g dans le repère **C** et Δ la droite d'équation $x = 1$ dans le repère **C**.

I.2.1. Montrer que Δ est un axe de symétrie de $\mathcal{G}$.

I.2.2. Tracer sommairement $\mathcal{G}'$ la courbe représentative de $T(g)$ dans le repère **C**.

I.2.3. Déterminer un axe de symétrie de $\mathcal{G}'$.

I.2.4. La fonction $T(g)$ est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

T.S.V.P.

Deuxième partie : étude de T.

II.1. Montrer que, pour tout élément f de $\mathbf{E}$, l'application $T(f)$ appartient à $\mathbf{E}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.2. On note T l'application de $\mathbf{E}$ dans lui-même définie par $f \mapsto T(f)$.

II.2.1. Rappeler pourquoi T est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

II.2.2. T est-elle une application surjective ?

II.3. On suppose que f est une application de $\mathbf{E}$, bornée sur $\mathbb{R}$.

II.3.1. Montrer que $T(f)$ est également une application bornée sur $\mathbb{R}$.

II.3.2. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x-y|.$$

II.4. Montrer que si f est une fonction périodique de $\mathbf{E}$ alors $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

II.5. Déterminer la parité de $T(f)$ en fonction de la parité de f.

Troisième partie : étude de restrictions.

III.1. Soit ω un réel non nul ; on note $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 les fonctions de $\mathbf{E}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = \cos(\omega x), \quad \varphi_2(x) = \sin(\omega x), \quad \varphi_3(x) = x\cos(\omega x), \quad \varphi_4(x) = x\sin(\omega x).$$

On note F_ω le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ engendré par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4.

III.1.1. On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F_ω.

III.1.2. Calculer $T(\varphi_1), \ldots, T(\varphi_4)$ et en déduire que $T(F_\omega) \subset F_\omega$.

Dans la suite on note M_ω la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la restriction T_ω de T à F_ω, définie par:

$$\begin{aligned} T_\omega : F_\omega &\to F_\omega \\ f &\mapsto T(f) \end{aligned}$$

III.1.3. Déterminer le rang de M_ω selon la valeur de ω.

III.1.4. Déterminer le noyau de T_ω selon la valeur de ω.

III.1.5. L'endomorphisme T_ω est-il injectif ?

III.2. Soit (d,n) un couple d'entiers naturels non nuls ; on note ε_n le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varepsilon_n(x) = x^n$ et ε_0 la fonction constante égale à 1. On rappelle que $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

III.2.1. Montrer que $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$.

Dans la suite on note A_d la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la restriction, Θ_d, de T à $\mathbb{R}_d[X]$ définie par:

$$\begin{aligned} \Theta_d : \mathbb{R}_d[X] &\to \mathbb{R}_d[X] \\ f &\mapsto T(f) \end{aligned}$$

III.2.2. Déterminer A_3. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?
III.2.3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de Θ_d.
III.2.4. Dans le cas où $d \geq 2$, l'endomorphisme Θ_d est-il diagonalisable ?
III.2.5. L'endomorphisme Θ_d est-il bijectif ?

III.3. Soit Θ la restriction de T à $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ f &\mapsto T(f) \end{aligned}$$

III.3.1. Montrer que Θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
III.3.2. L'endomorphisme Θ est-il bijectif ?
III.3.3. On note h le polynôme $2\varepsilon_3 + 6\varepsilon_2 + 8\varepsilon_1 + 4\varepsilon_0$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $\Theta(f) = h$.

Quatrième partie : étude d'une transformée.

On note g l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}.$$

On rappelle que pour tout x réel on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel dont le cube vaut x.

IV.1. Etude de la fonction g.

IV.1.1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g.
IV.1.2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et donner son tableau de variation.
IV.1.3. Montrer que $\mathcal{G}_1$, courbe représentative de g, admet une asymptote oblique dont on étudiera la position par rapport à la courbe $\mathcal{G}_1$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
IV.1.4. Tracer avec soin la courbe représentative de g ainsi que son asymptote oblique.

IV.2. Etude de la fonction $T(g)$.

IV.2.1. Etudier la parité de $T(g)$.
IV.2.2. Déterminer les variations de $T(g)$.
IV.2.3. Calculer la valeur $T(g)(0)$.

Deuxième problème : matrices de Toeplitz.

Dans ce problème , on note de nouveau, pour tout entier naturel d, $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à d et ε_d l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t^d$. On note $S : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ l'application définie par

$$\forall (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, S(\sum_{i=0}^{i=d} a_i \varepsilon_i) = \sum_{i=0}^{i=d-1} a_{i+1}\varepsilon_i.$$

T.S.V.P.

Dans la suite du problème d désigne un entier naturel, I_d l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_d[X]$, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}_d[X]$. Enfin, on note $\mathcal{U}$ le sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ engendré par

$$(I_d, S, S^2, \ldots, S^d).$$

Première partie.

I.1. Montrer que S est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ et donner les images par S des vecteurs de la base $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_d)$.
I.2. Ecrire la matrice de S dans la base $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_d)$.
I.3. Ecrire la matrice de S^k dans la base $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_d)$ pour k entier naturel compris entre 1 et d puis vérifier que $S^{d+1} = 0$.
I.4. Montrer que $(I_d, S, S^2, \ldots, S^d)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$.
I.5. Vérifier qu'un élément $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si sa matrice $B = (b_{i,j})$, dans la base $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_d)$, est triangulaire supérieure et vérifie $b_{i,j} = b_{0,j-i}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leq i \leq j \leq d$.
I.6. Dans cette question on suppose que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ commute avec S ; montrer que

$$\forall k \in \{0, \ldots, d\}, u(\varepsilon_k) = S^{d-k}(u(\varepsilon_d)).$$

En déduire que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}_d[X]$ qui commutent avec S.

Deuxième partie.

Dans cette partie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ est un d-uplet de réels. On suppose que λ_1 est non nul et on note $u = \sum_{k=1}^{k=d} \lambda_k S^k$.

II.1. Déterminer u^{d+1} et montrer que $(I_d, u, u^2, \ldots, u^d)$ est une base de $\mathcal{U}$.
II.2. On note $e_d = \varepsilon_d$ et pour tout k entier naturel, $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, on note $e_k = u^{d-k}(e_d)$. Montrer que $(e_0, \ldots, e_d)$ constitue une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Ecrire la matrice de u dans cette base.

FIN.